Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

д.т.н. проф. Драгунов В.К.

« » мая 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

специальной дисциплины 1.1.6. Вычислительная математика

Москва 2022

Программа составлена на основе паспорта специальности научных работников и программы - минимум кандидатского экзамена по специальности 1.1.6. «Вычислительная математика» в действующей редакции и в соответствии с Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адьюнктуре), утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации от 30 ноября 2021г. № 2122.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины является изучение основных разделов вычислительной математики.

Задачами дисциплины являются: изучение численных методов решения систем линейных и нелинейных уравнений, методов приближения функций, теории численного интегрирования, численных методов решения задачи Коши, краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, изучение функционального анализа и теории уравнений с частными производными,

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ПРОГРАММЫ АСПИРАНТУРЫ

Специальная дисциплина в структуре программы аспирантуры входит в Блок 2 «Образовательный компонент. Общая трудоемкость составляет 7 зачетных единиц (з.е.). Педагогическая практика выполняется в течение всего периода обучения. Распределение ее общего объема по годам обучения приводится в учебном плане программы аспирантуры. Педагогическая практика является стационарной, проводится на кафедрах НИУ «МЭИ».

Формула специальности

Специальность «Вычислительная математика» – область науки, к которой относятся разработка и теория методов численного решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, а также реализация методов в практическом решении задач с применением современных вычислительных систем.

Области исследований

1. Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники.

2. Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности.

3. Особенности численных методов и связанных с ними программных комплексов, отражающие рост производительности современных

вычислительных систем и способствующие повышению эффективности вычислений.

4. Создание и реализация численных методов для решения прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач.

Отрасль науки

– физико-математические науки.

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: численные методы, функциональный анализ, уравнения математической физики.

Программа разработана на основе программы - минимум кандидатского экзамена по специальности 1.1.6. – «Вычислительная математика», утвержденной экспертным советом Высшей аттестационной комиссии.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы

Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений с заполненными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами. Быстрое дискретное преобразование Фурье.

Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование быстро осциллирующих функций.

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Разностные методы. Оценка погрешности, сходимость, аппроксимация и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления, переменных направлений. Понятие о многосеточном методе. Оценки скорости сходимости.

Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Функциональный анализ

Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категории. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений.

Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества. Критерии относительной компактности в $C(K)$ и $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$ (теорема Асколи-Арцела и критерий Рисса).

Интеграл Лебега и его свойства. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Б. Леви и Фату. Теорема Фубини.

Пространства Лебега L_p, $1 \le p \le \infty$ и их свойства. Неравенства Гельдера и Минковского.

Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей.

Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения.

Ряд Неймана. Теоремы о существовании обратного оператора.

Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Сопряженное пространство. Теорема Рисса-Фреше о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства).

Спектр линейного оператора. Сопряженные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.

Преобразование Фурье и его свойства. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини. Преобразование Фурье функций из $S^{\infty}(R^m)$. Преобразование Фурье свертки. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Обобщенная производная и ее свойства. Пространства Соболева W_p^1 и их свойства. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Понятие о теоремах вложения. Понятие о следах функций из пространств Соболева.

Задачи математической физики

Математические модели физических явлений, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Ньютонов потенциал.

Задача Коши для уравнения теплопроводности (в одномерном и многомерном случаях).

Задача Коши для уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях). Характеристики. Характеристический конус. Фундаментальные решения.

Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова. Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаэдо-Галеркина. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

Вопросы для самоконтроля и проведения кандидатского экзамена

1. Одношаговые итерационные методы.
2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы.
3. Методы подпространства Крылова.
4. Методы сопряженных градиентов и сопряженных невязок, MINRES.
5. Метод Ланцоша. Алгоритм Арнольди.
6. Методы решения систем с несимметричными матрицами. GMRES. Метод бисопряженных градиентов.
7. Предобусловливание. Предобусловленный метод сопряженных градиентов. Предобусловленный GMRES. Неполная LU-факторизация.
8. Матрица Фурье и быстрое дискретное преобразование Фурье.
9. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения.
10. Конечные и разделенные разности.
11. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Выбор узлов интерполяции.
12. Локальные и нелокальные сплайны. Интерполяция сплайнами.
13. Интерполяционные квадратурные формулы.
14. Квадратурные формулы Гаусса.
15. Многомерные квадратурные формулы.
16. Понятие о методе Монте-Карло.
17. Интегрирование быстро осциллирующих функций.
18. Численные методы решения задачи Коши. Явные и неявные методы. Методы Рунге-Кутты и Адамса.
19. Устойчивость численных методов решения задачи Коши.
20. Понятие о жестких задачах и методах их решения.
21. Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.
22. Метод пристрелки (стрельбы).
23. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

24. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость).

25. Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала).

26. Разностная схема для задачи Дирихле в прямоугольнике. Принцип максимума и теоремы сравнения. Априорная оценка решения, его существование и единственность. Погрешность аппроксимации и оценка погрешности.

27. Разностная схема для уравнения Пуассона на неравномерной сетке и ее свойства.

28. Начально-краевая задача для параболических уравнений. Полудискретный метод (метод прямых).

29. Двухслойные разностные схемы, погрешность аппроксимации. Устойчивость явной и чисто неявной разностных схем. Спектральный и энергетический методы исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весами.

30. Экономичные методы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Метод переменных направлений, метод приближенной факторизации, метод с расщепляющимся оператором. Локально-одномерные методы и их свойства.

31. Прямые методы решения сеточных уравнений (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции и др.).

32. Итерационные методы решения сеточных уравнений (метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод).

33. Понятие о многосеточном методе. Сглаживающее свойство базовых итерационных методов. Классический многосеточный метод. V-, W- и F– циклы. Сходимость многосеточного метода.

34. Методы решения обратных и некорректных задач.

35. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

36. Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

37. Теорема Бэра о категории.

38. Теорема Хаусдорфа о пополнении.

39. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений.

40. Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества.

41. Критерии относительной компактности в $C(K)$ и $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$ (теорема Асколи-Арцела и критерий Рисса).

42. Интеграл Лебега и его свойства. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.

43. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Б. Леви и Фату.

44. Теорема Фубини.

45. Пространства Лебега L_p, $1 \le p \le \infty$ и их свойства. Неравенства Гельдера и Минковского.

46. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

47. Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей.

48. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

49. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

50. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

51. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения.

52. Ряд Неймана. Теоремы о существовании обратного оператора.

53. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

54. Сопряженное пространство.

55. Теорема Рисса-Фреше о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства).

56. Спектр линейного оператора.

57. Сопряженные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.

58. Преобразование Фурье и его свойства.

59. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини.

60. Преобразование Фурье функций из $S^{\infty}(R^m)$.

61. Преобразование Фурье свертки.

62. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.

63. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато.

64. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

65. Обобщенная производная и ее свойства.

66. Пространства Соболева W_p^1 и их свойства.

67. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

68. Понятие о теоремах вложения.

69. Понятие о следах функций из пространств Соболева.

70. Основные уравнения математической физики; постановки задач.

71. Корректно и некорректно поставленные задачи.

72. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).

73. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

74. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Ньютонов потенциал.

75. Задача Коши для уравнения теплопроводности (в одномерном и многомерном случаях).

76. Задача Коши для уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях). Характеристики. Характеристический конус.

77. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

78. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.

79. Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

80. Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

81. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

82. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

83. Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаэдо-Галеркина.

84. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

85. Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена.

Требования и критерии оценивания ответов экзамена

В процессе экзамена оценивается уровень научно-исследовательской компетентности аспиранта, что проявляется в квалифицированном представлении результатов обучения.

При определении оценки учитывается грамотность представленных ответов, стиль изложения и общее оформление, способность ответить на поставленный вопрос по существу.

Критерии выставления оценки на экзамене:

<u>Оценка «ОТЛИЧНО»</u> выставляется аспиранту, который показал при ответе на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы,

что владеет материалом изученной дисциплины, свободно применяет свои знания для объяснения теоретических положений и решения задач.

Оценка «ХОРОШО» выставляется аспиранту, в основном правильно ответившему на вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы, но допустившему при этом непринципиальные ошибки.

Оценка «УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» выставляется аспиранту, который в ответах на вопросы экзаменационного билета допустил существенные и даже грубые ошибки, но затем исправил их сам

Оценка «НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» выставляется аспиранту, который:

а) не ответил на вопросы экзаменационного билета

б) при ответе на дополнительные вопросы обнаружил незнание большого раздела экзаменационной программы.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. - СПб: Изд-во "Лань", 2014.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
5. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. М.: Издательский центр "Академия", 2007.
6. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
8. Бакушинский А.Б., Худак Ю.И. Элементы функционального анализа. М.: ACADEMIA, 2011.
9. Иосида К. Функциональный анализ. Изд. 3-е. М.: ЛКИ, 2010.
10. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Изд-во "Лань", 2009.
11. Треногин В.А. Функциональный анализ. В 2-х т. М.: Академия, 2012.
12. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
14. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.
15. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

16. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

Дополнительная литература:

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Василевский Ю.В., Ольшанский М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. – М.: МАКС Пресс, 2007.
4. Ольшанский О.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Физматлит, 2005.

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: ОС Windows, Microsoft Office, C++, MATLAB.

Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Университетская информационная система «РОССИЯ» https://uisrussia.msu.ru

Справочно-правовая система «Консультант+» http://www.consultant-urist.ru

Справочно-правовая система «Гарант» http://www.garant.ru

База данных Web of Science https://apps.webofknowledge.com/

База данных Scopus https://www.scopus.com

Портал открытых данных Российской Федерации https://data.gov.ru

База открытых данных Министерства труда и социальной защиты РФ https://rosmintrud.ru/opendata

База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU https://elibrary.ru/

База данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/

Базы данных Министерства экономического развития РФ http://www.economy.gov.ru

База открытых данных Росфинмониторинга http://www.fedsfm.ru/opendata

Электронная база данных «Издательство Лань» https://e.lanbook.com

Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» https://нэб.рф

Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование» https://openedu.ru

Электронная база данных "Polpred.com Обзор СМИ" https://www.polpred.com

Официальный сайт Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии http://protect.gost.ru/

Электронная библиотека МЭИ https://ntb.mpei.ru/e-library/index.php.

ПРОГРАММУ СОСТАВИЛИ:

Профессор кафедры МКМ,
докт. физ.–мат. наук, профессор А.А. Амосов

Профессор кафедры МКМ,
докт. физ.–мат. наук, профессор Ю.А. Дубинский

Зав. кафедрой МКМ,
канд. физ.–мат. наук, доцент П.В. Зубков

ДИРЕКТОР ИВТИ

канд. техн. наук, доцент С.В. Вишняков